

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

10 класс

Уважаемый участник олимпиады!

Вам предстоит выполнить теоретические задания.

Время выполнения заданий – 235 минут.

Выполнение заданий целесообразно организовать следующим образом:

- не спеша, внимательно прочитайте задания;
- не забывайте переносить решения в чистовик, черновики не проверяются;
- решение каждой задачи начинайте с новой страницы;
- задача считается решенной, если в ней приведено полное доказательство или обоснование ответа (за исключением случаев, когда в условии написано, что требуется привести только ответ);
- после выполнения заданий еще раз удостоверьтесь в правильности записанных ответов и решений.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

Условия задач

10.1. Найдите значение выражения: $\frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2025}+\sqrt{2024}}$.

10.2. Найдите все натуральные n , при которых $4^n + n^4$ является простым числом.

10.3. Найдите все целые числа, удовлетворяющие уравнению:

$$\frac{1}{\sqrt{2x-3y+1}} + \frac{1}{\sqrt{y-x+2}} + \frac{1}{\sqrt{2y-x}} = 3.$$

10.4. Точки A , B и C лежат на одной прямой. Отрезок AB является диаметром первой окружности, а отрезок BC – диаметром второй окружности. Прямая, проходящая через точку A , пересекает первую окружность в точке D и касается второй окружности в точке E , $BD = 9$, $BE = 12$. Найдите радиусы окружностей.

10.5. В клетчатой полоске $1 \times n$ некоторые клетки закрашены, а некоторые – нет. При этом среди любых четырёх подряд идущих клеток не более одной закрашенной, а среди любых семи подряд идущих клеток – не менее двух закрашенных. При каком наибольшем n это возможно?